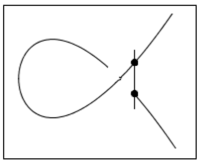
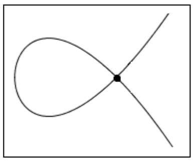
Ebene algebraische Kurven - Vorlesung vom 15.07.2016

Auflösen von Singularitäten durch Aufblasen

Beispiel Einfache Kurve mit einer Singularität



$\downarrow$



Bemerkung
Durch endlich vieles Aufblasen kann jede beliebige Kurve geglättet werden.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{C}} & \hookrightarrow & \tilde{\mathbb{P}}^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

wobei $\tilde{\mathbb{P}}^2 \to \mathbb{P}^2$ Aufblasung und $\tilde{\mathcal{C}}$ strikt Transformierte

Beispiel „Newtonsche Knoten“
$c : y^2 = x^2(1+x)$
Parametrisiere $y = tx$
$\Rightarrow t^2x^2 = x^2(1+x)$
$\Rightarrow t^2 = 1 + x$; $x = t^2 - 1$ und $y = t(t^2 - 1)$
Daraus ergibt sich die folgende Aufblasung:
$(x, t) \mapsto (x, tx)$
$\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$
$t \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$

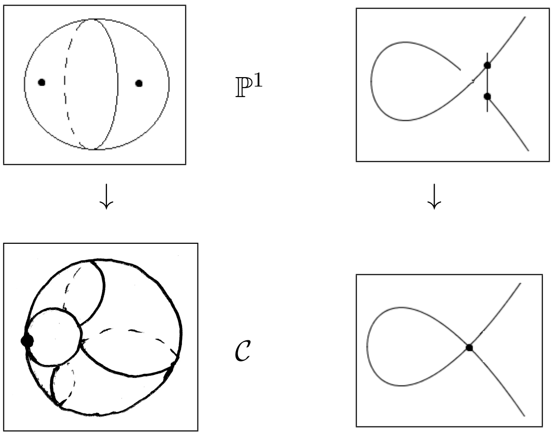
(5.10) Geschlecht einer singulären Kurve

Bemerkung
$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ reduzible Kurve
$\tilde{\mathcal{C}} = \tilde{\mathcal{C}}_1 \cup \tilde{\mathcal{C}}_2$ nicht zusammenhängende Kurve

Fakt
Wenn $\mathcal{C}$ irreduzibel $\Rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ zusammenhängend und orientierbar

Definition
Sei $\mathcal{C}$ irreduzible Kurve $\subset \mathbb{P}^2$
Dann wird das Geschlecht von $\mathcal{C}$ definiert durch $g(\mathcal{C}) := g(\tilde{\mathcal{C}})$

Beispiel



$g\left(\mathcal{C}\right) = g\left(\mathbb{P}^1\right) = 0$
Erinnerung (4.16) Riemann-Clebsch
Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ glatt vom Grad d. Dann gilt:

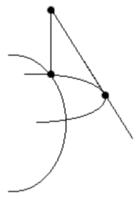
$$g(\mathcal{C}) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

Satz
Sei $\mathcal{C}$ irreduzibel mit δ gewöhnliche Doppelpunkte vom Grad d. Dann gilt:

$$g(\mathcal{C}) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta$$

Folgerung
Es gilt:

$$\delta \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$



Beweis. Wieder mit Projektion auf eine Gerade.

Betrachte Polare $\nabla_p \mathcal{C}$ und $Q \in \sum_i = sing(\mathcal{C})$
Dann ist:
$\mathcal{I}(\mathcal{C}, \nabla_p \mathcal{C}; Q) = 2$

□

Proposition
Ist $|PQ|$ keine singuläre Tangente in Q. Dann gilt:

$$\mathcal{I}(\mathcal{C}, \nabla_p \mathcal{C}; Q) = 2$$

Beweis. o.B.d.A. $P = (0:1:0)$ und $Q = (0:0:1)$
$f(x,y)$ affine Gleichung für Kurve c

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + f_3 + ...$$

Für Polare muss nach y abgeleitet werden:

$$\partial_y f(x,y) = bx + 2cy + f_3^{'} + ...$$

Aber $|PQ| : x = 0$ keine singuläre Tangente in Q: c$\neq 0$
$\Rightarrow$ Polare sind glatt in Q

Parametrisiere:
$x = t$, $y = \alpha t + ...$, $\alpha = -\frac{b}{2c}$
$\Rightarrow \mathcal{I}(\mathcal{C}, \nabla_p \mathcal{C}; Q) = Ord_0(\text{f(x}|t), y(t)) = 2$
Und somit haben wir eine Schnittmultiplizität von 2

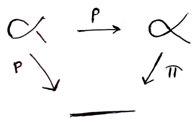
□

Beweis. (von Satz)
Wie in Satz von Riemann-Clebsch
Projiziere $P \in \mathbb{P}^2$ auf eine Gerade L ($\cong \mathbb{P}^1$) mit folgender Bedingung:

1. $P \notin \mathcal{C}$
2. $P \notin$ singuläre Tangente in $Q = Sing(\mathcal{C})$

3. restliche $d(d-1)-2\delta$ Tangente durch P an glatte Punkte von $\mathcal{C}$ sind alle verschieden

Wir bekommen $\tilde{\mathcal{C}} \to L : p \mapsto \pi \circ \rho(p)$ wobei $\tilde{\mathcal{C}} \xrightarrow{\rho} \mathcal{C}$ und $\mathcal{C} \xrightarrow{\pi} L$



Und erhalten die folgende Triangulierung:

$$\tilde{E} = dE - (d(d-1) - 2\delta)$$
$$\tilde{K} = dK$$
$$\tilde{F} = dF$$

Daraus ergibt sich:

$$2 - 2g(\tilde{\mathcal{C}}) = d(E - K + F) - d(d-1) + 2\delta$$
$$\Rightarrow g(\tilde{\mathcal{C}}) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta$$

□

(5.11) Allgemeine Geschlechtsformel

$\mathcal{C}$ irreduzibel vom Grad d mit gewöhnlichen Singularitäten. Das heißt, wir haben P_i gewöhnliche m_i-fach Punkte, wobei $i = 1, .., r$
Dann gilt:

$$g(\mathcal{C}) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(m_i-1)}{2} = \Delta(\mathcal{C})$$

Beweis. Analog □

Satz
$\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ irreduzibel vom Grad d, $\sum := sing(\mathcal{C})$.
Dann gilt

$$g(\mathcal{C}) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{p \in \sum} \delta(c, p)$$

wobei $\delta(c,p)$:=delta-Invariante von $\mathcal{C}$ in P.
$P = 0$, $f(x,y) = 0$ affine Gleichung für $\mathcal{C}$
$f = f_1 ... f_r \in \mathbb{C}\,[|X, Y|]$ irreduzible Zweige von c.
$c_i = V(f_i)$

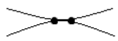
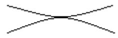
Erinnerung
In (3.13) haben wir für Zweige $\delta(c_i, 0)$ folgendes definiert:

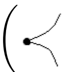
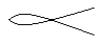
$\delta(c,P) = \sum_{i=1}^{n} \delta(c_i, 0) + \sum_{1 \le i < j \le r} \mathcal{I}(c_i, c_j; P)$

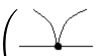
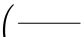
Beispiele

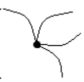
δ () $= 1$

δ () $= 0$

δ () $= 2$ Mit folgender Verschiebung:  $\rightarrow$ 

δ () $= 1$ Mit folgender Verschiebung:  $\rightarrow$ 

δ () $= 1$ Mit: δ () $+ \delta$ () $+ \mathcal{I}$ ( , ; 0) $= 1 + 0 + 2 = 3$

δ () $= 1$ Mit: δ () $+ \delta$ () $+ \mathcal{I}$ ( ,  ; 0) $= 1 + 1 + 4 = 6$

$x^5 + x^2y^2 + y^5 = 0$ Mit: $g = \frac{4*3}{2} - \sum \delta(c,p) = 6 - 6 = 0$

Satz
Sei $\mathcal{C}$ irreduzibel $\subset \mathbb{P}^2$. Dann gilt

$$g(\mathcal{C}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{C} \text{ rational und parametrisierbar}$$

Idee für $g(\mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{C}$ parametrisierbar:

1. Verwandel $\mathcal{C}$ in Kurve mit nur gewöhnlichen Singularitäten
   P_i ist m_i-fach Punkt $i = 1, ..r$
2. Betrachte $\mathcal{W} = \mathcal{V}_{d-2}((m_1 - 1)P_1, (m_2 - 1)P_2, .., (m_r - 1)P_r; Q_1, Q_2, ..., Q_{d-3})$
   wobei $Q_1, Q_2, ..., Q_{d-3}$ beliebig gewählt auf $\mathcal{C}$

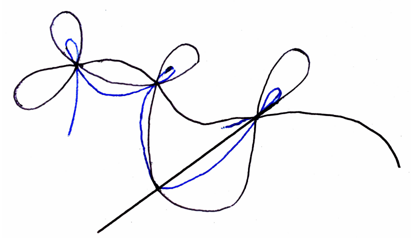
$$dim\mathcal{W} \ge \frac{d(d-1)}{2} - \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i(m_i - 1)}{2} - (d-3)$$

Wenn $g(\mathcal{C}) = 0$:

$$\frac{d(d-1)}{2} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i(m_i-1)}{2}$$

$$\Rightarrow dim\mathcal{W} \geq \frac{d^2 - d - d^2 + 3d - 2 - 2d + 6}{2} = 2$$

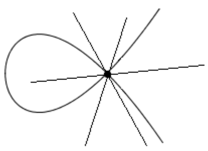
Fakt
dim$\mathcal{W} = 2$
$W = \langle H, G \rangle$
$\mathcal{C} \backslash \mathcal{B} \to \mathcal{P}^1$, wobei $\mathcal{B} = \mathcal{V}(H, G)$
$p \mapsto (H(P); G(P))$
Warum ist die Abbildung injektiv? Betrachte dazu das Urbild von $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$
$\mathcal{C} \cap \{-\mu H + \lambda G = 0\}$



$\mathcal{C} \cap D_{\lambda:\mu}$

$$d(d-2) - \sum m_i(m_i - 1) - (d-3)$$
$$= d^2 - 2d - (d-1)(d-2) - (d-3) = 1$$

Beispiele



$d = 3$

$d = 4$